Algèbre Linéaire

Section MT 2024
Giordano Favi
Cours 1.1

Plan cours :

1. Systèmes linéaires
2. Calcul matriciel
3. Déterminants
4. Espaces vectoriels
5. Vecteurs et valeurs propres
6. Orthogonalité
7. Matrices symétriques

Infos :
- Moodle
- Questions : utilisez le Forum
- Référence : Algèbre linéaire & applications (4ème édition), David Lay (~ 600 p.)

exercices : Jeudis de 16^h à 18^h

Notations / Symboles :

$\emptyset$ – l'ensemble vide

$\mathbb{N}$ – l'ensemble des entiers naturels

$\mathbb{Z}$ – " " relatifs

$\mathbb{Q}$ – " des rationnels

$\mathbb{R}$ – " des réels

$\mathbb{C}$ – " des complexes

- le symbole "$\in$" se lit "appartient à"
  ou "est élément de"

$7 \in \mathbb{N}$, $-43 \in \mathbb{Z}$ $\quad -43 \notin \mathbb{N}$

$7/3 \notin \mathbb{N}$ $\quad 7/3 \in \mathbb{Q}$

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ $\quad \sqrt{2} \in \mathbb{R}$

(si p premier $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$)

- le symbole "$\subset$" se lit "est sous-ensemble de"
  ou "est inclus dans"

ex : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

(et $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$, $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{Z}$, ...)

- Pour A et B deux ensembles on écrit $A \subset B$ si $\forall x \in A$, on a $x \in B$

se lit "pour tout" ($\forall$ = For All)

- Dire que $A \not\subset B$ signifie $\exists x \in A$ tel que $x \notin B$

se lit "il existe" ($\exists$ = there exists)

Pour plus sur les ensembles

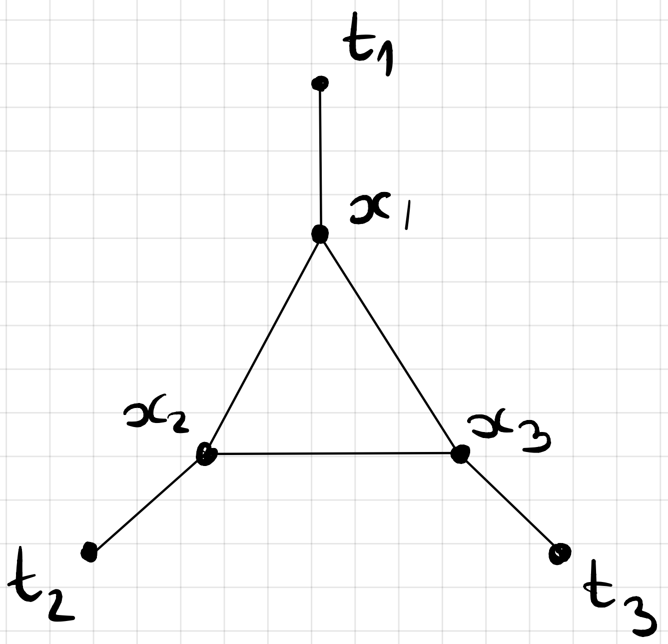
$\rightarrow$ Mooc Analyse I (P. Wittwer)

(700 quizzes)

Chap. 1 : Systèmes linéaires

§ 1.0 Intro

ex : Grille chauffante



Problème :

Trouver les températures aux points x_1, x_2, x_3 en fonction de t_1, t_2, t_3.

supposées connues

sous l'hypothèse suivante

(H) la température en x_i est la moyenne des températures des points voisins. (pour $i = 1,2,3$)

$$(H) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{t_1 + x_2 + x_3}{3} \\[2ex] x_2 = \dfrac{x_1 + t_2 + x_3}{3} \\[2ex] x_3 = \dfrac{x_1 + x_2 + t_3}{3} \end{cases}$$

système linéaire à 3 variables inconnues et 3 équations

$\boxed{t_1, t_2, t_3 \text{ connus}}$

But : Trouver (x_1, x_2, x_3)
qui satisfont le système ci-dessus
(en fonction de t_1, t_2, t_3)
p.ex $t_1 = 16°$, $t_2 = 12°$, $t_3 = 20°$)

(+ d'exemples dans la Série 1 etc...
qui apparaît à 15h tous les mardis
- la solution apparait à 18h tous les jeudis

- Lay, Alg. linéaire & appl. [AL]
- Dalang, Chaabouni, Alg. linéaire)

Rem : le système ci-dessus équivaut ($\Leftrightarrow$)

$$\begin{cases} 3x_1 = t_1 + x_2 + x_3 \\ 3x_2 = x_1 + t_2 + x_3 \\ 3x_3 = x_1 + x_2 + t_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = t_1 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = t_2 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 = t_3 \end{cases}$$

§ 1.1 Systèmes linéaires (AL p. 2-4)

Déf : Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Une équation linéaire d'inconnues $x_1, \dots, x_n$ (à n variables)

est une expression de la forme

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b$$

où les nombres (coefficients) $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$ (supposés connus dans le contexte)

Un système linéaire d'inconnues $x_1, \dots, x_n$

est la donnée d'un nombre (non nul) ~~ensemble (non vide)~~ d'équations linéaires d'inc. $x_1, \dots, x_n$

ex :
$$\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 1 \\ 7x_1 - \frac{1}{e}x_2 + \sqrt{1291}\,x_3 = -29 \end{cases}$$

syst. à 2 équations à 3 inconnues x_1, x_2, x_3

Etant donné un syst. lin. à n variables $x_1, \dots, x_n$

On appelle une <u>solution du système</u> tout n-uplet (ordonné) $(s_1, \dots, s_n)$ de nombres (réels, $\in \mathbb{R}$) qui vérifie (satisfait) <u>toutes</u> les equations linéaires du système si l'on remplace x_i par s_i respectivement $(\forall i = 1, 2, \dots, n)$

Buts : Trouver l'ensemble de toutes

- les solutions d'un système linéaire

- Décrire l'ensemble solution (comme objet géométrique / algebrique)

<u>ex</u> :

(1)

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x - 2y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y \\ 3(1-y) - 2y = 13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y \\ 3 - 3y - 2y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y \\ -5y = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$$

une seule solution

$$S = \{(3,-2)\}$$

2) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+2y+z=0 \\ x=1+y \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -1-2y \\ x = 1+y \end{cases}$$

on a exprimé x et z et fonction de y

et on peut à présent décrire l'ens. solution en donnant une valeur arbitraire à y

disons $y = t$ avec $t \in \mathbb{R}$

et l'ens. solution de 2) est

$$S = \{(1+t, t, -1-2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

se lit "avec" ou "tel que"

l'expression ↗ est une représentation paramétrique (de paramètre $t \in \mathbb{R}$) d'une droite dans $\mathbb{R}^3$

<u>Rem</u> : S possède une infinité d'éléments

<u>Rem</u> : Autre façon de décrire S :

$$(1+t, t, -1-2t) = (1,0,-1) + t(1,1,-2)$$

$t \in \mathbb{R}$

il s'agit de la droite (de $\mathbb{R}^3$) passant par le point $(1,0,-1)$ et de vecteur directeur $(1,1,-2)$

3) Systèmes à paramètre ($a \in \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} ax + y = 0 \\ 3x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax = -y \\ 3x + ax = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax = -y \\ (3+a)x = 1 \end{cases}$$

⚠ cas à discuter.

• si $a = -3$ cela donne $0 \cdot x = 1$

$\Rightarrow S = \emptyset$ (pas de solution)

• si $a \neq -3$ on peut diviser par $a+3$

$(a \neq -3)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{a}{a+3} \\ x = \dfrac{1}{a+3} \end{cases}$$

d'où l'unique solution (dépendant de a)

$$S_a = \left\{ \left(\frac{1}{a+3}, -\frac{a}{a+3} \right) \right\} \quad (a \neq -3)$$

NB: on "pourrait" regarder des systèmes à n inconnues et une infinité d'éq.

ex.
$$\begin{cases} x+y = 1 \\ x+2y = 2 \\ x+3y = 3 \\ \vdots \\ x+ny = n \\ \vdots \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x+y = 1 \\ x+y = 1 \\ x+y = 1 \\ \vdots \end{cases}$$

mais on ne va pas regarder ces cas

Ecriture matricielle d'un système (AL p.4)

Nous allons étudier les systèmes linéaires

à n inconnues $x_1, x_2, \dots, x_n$

et m équations (avec $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$)

Un tel système a la forme suivante :

$$\star \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 & 1^{\text{ère}} \text{ éq.} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 & 2^{\text{ème}} \text{ éq.} \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m & m^{\text{ème}} \text{ éq} \end{cases}$$

on écrit $\star$ en se débarassant

des $+$, $=$ et des x_i

et on garde les coefficients (entre parenthèses)

$$M_\star = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

$m =$ nombre de lignes
nombre d'équations

$n =$ nombre d'inconn.
nombre de colonnes

$M_{\star}$ s'appelle la matrice associée à $\star$

parfois on regarde la matrice

$$M_{\star}^{+} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} & b_2 \\ & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} & b_m \end{array}\right)_{m \times (n+1)}$$

= la matrice augmentée du système $\star$

Not: Une matrice de taille $m \times n$

(lignes × colonnes)

(equations × inconnues)

est la donnée d'un "tableau rectangulaire" de nombres ($\in \mathbb{R}$) (appelés coefficients) ayant m lignes et n colonnes

$(m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$

$M_{m \times n}(\mathbb{R})$ = l'ensemble de toutes les matrices $m \times n$ à coeff. réels